

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Τομές Άλγεβρας και Γεωμετρίας
Μάθημα: Διαφορική Γεωμετρία
Διδάσκων: Βλάχος Θεόδωρος
Ιανουάριος 2018

Θέμα 1

- (i) Να βρεθεί μία καμπύλη $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, με παράμετρο το μήκος τόξου s η οποία έχει καμπυλότητα $k(s) = 2$, για κάθε s και πληροί $c(0) = (0, 0)$ και $\dot{c}(0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
- (ii) Δίνεται η καμπύλη $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο $s \in I$ και καμπυλότητα $k(s) > 0$, για κάθε $s \in I$. Υποθέτουμε ότι το δεύτερο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα \vec{b} ικανοποιεί τη σχέση :

$$\ddot{\vec{b}}(s) + \dot{\vec{b}}(s) = 0, \forall s \in I.$$

Αποδείξτε ότι η καμπύλη c είτε είναι επίπεδη, είτε κυλινδρική έλικα.

Θέμα 2

- (i) Δίνεται η επιφάνεια με εξίσωση $x + y = z^2$. Αποδείξτε ότι είναι κανονική επιφάνεια και να βρείτε ένα σύστημα συντεταγμένων αυτής. Βρείτε (αν υπάρχουν) τις ασυμπτωτικές καμπύλες της επιφάνειας. Εξετάστε αν είναι ευθειογενής, αναπτυκτική και βρείτε ένα σύστημα ασυμπτωτικών καμπυλών. Να βρεθεί η απεικόνιση Gauss να περιγραφεί γεωμετρικά η εικόνα της και να εξετάσετε αν είναι 1-1.
- (ii) Δίνεται η παραμετρική επιφάνεια

$$X(u, v) = (u, v, u^2 + v^2), (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

και η επιφανειακή καμπύλη c με $c(t) = X(t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η καμπύλη c είναι γραμμή καμπυλότητας της επιφάνειας X και να βρείτε το επίπεδό της.

Θέμα 3

- (i) Να αποδείξετε τον τύπο του Euler.
- (ii) Κανονική επιφάνεια S είναι τοπικά ισομετρική με σφαίρα ακτίνας $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Σε σημείο $p \in S$ και για το μοναδιαίο διάνυσμα $w \in T_p S$ το οποίο διχοτομεί τη γωνία των κύριων διευθύνσεων να δείξετε ότι η κύριη καμπυλότητα $k_n(w) = \frac{3}{2}$. Να υπολογίσετε τις κύριες καμπυλότητες της S στο σημείο p .

Θέμα 4

Δίνεται η παραμετρική επιφάνεια

$$X(s, v) = c(s) + v\vec{b}(s), (s, v) \in I \times \mathbb{R}$$

όπου $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου s , καμπυλότητα $k(s) > 0$, για κάθε $s \in I$ και δεύτερο κάθετο διάνυσμα το \vec{b} .

- (i) Να αποδείξετε ότι η παραμετρική επιφάνεια X είναι κανονική. Υπολογίστε την πρώτη και δεύτερη θεμελιώδη μορφή της. Υπάρχουν ομφαλικά σημεία;

(ii) Αποδείξτε ότι η παραμετρική επιφάνεια είναι αναπτυκτή αν και μόνο αν η καμπύλη c είναι επίπεδη. Στην περίπτωση αυτή η επιφάνεια είναι κυλινδρική, κωνική ή επιφάνεια εφαπτομένων;

- Απαντήσεις οι οποίες δεν είναι τεκμηριωμένες δεν λαμβάνονται υπόψιν.
- Σοβαρά μαθηματικά λάθη θα επηρεάσουν αρνητικά τη βαθμολογία.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Onlymaths και Φροντιστήριο π